EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….**064**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine ecuația planului care trece prin punctul $A(2,1,0)$ și care este perpendicular pe vectorul $\vec{n}(1,2,3)$.

(4p) **b)** Să se determine ecuația tangentei în punctul $A\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$ la elipsa de ecuație $x^2+4y^2-1=0$

(4p) **c)** Să se determine aria unui triunghi echilateral înscris în cercul de ecuație $x^2-2x+y^2=0$.

(4p) **d)** Să se dea exemplu de patru numere complexe de modul 1.

(2p) **e)** Să se calculeze $(\cos\pi+i\cdot\sin\pi)^{2007}$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\sin^2\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine $n\in\mathbf{N}^*$ astfel încât $1+2+3+...+2n=55$.

(3p) **b)** Să se determine domeniul maxim de definiție D al funcției $f:D\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{x(x-1)}$.

(3p) **c)** Să se determine toate tripletele de numere naturale (a,b,c) în progresie geometrică, știind că $a\cdot b\cdot c=8$.

(3p) **d)** Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $f=X^3+X+1$ la polinomul $g=X+1$.

(3p) **e)** Să se determine al treilea termen al dezvoltării $\left(x+\frac{2}{x}\right)^4$, $x\in\mathbf{R}^*$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^{2007}-2007x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f''(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției f.

(3p) **c)** Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale funcției f.

(3p) **d)** Să se calculeze $\int_0^1 f''(x)\,dx$

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2007}}\int_0^n f'(x)\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $M, N \in M_2(\mathbf{R})$, cu proprietatea $M \cdot N = N \cdot M$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$.

(4p) **a)** Să se arate că $\forall\, \alpha \in \mathbf{C}$, $\det(\alpha A) = \alpha^2 \cdot \det(A)$.

(4p) **b)** Să se arate că $A^2 - tr(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$, unde $tr(A) = a + d$.

(4p) **c)** Să se arate că $\det(X+Y) + \det(X-Y) = 2 \cdot \det(X) + 2 \cdot \det(Y)$, $\forall\, X, Y \in M_2(\mathbf{C})$.

(2p) **d)** Să se arate că $(M + i \cdot N)(M - i \cdot N) = M^2 + N^2$.

(2p) **e)** Să se arate că $\det(M + i \cdot N) = 0$ dacă şi numai dacă $\det(M - i \cdot N) = 0$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $\det(M^2 + N^2) = 0$, atunci $\det(M) = \det(N)$.

(2p) **g)** Să se arate că dacă $\det(M^2 + I_2) = 0$, atunci $M^2 + I_2 = O_2$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, $g_n : (-1, 1) \to \mathbf{R}$, $F_n : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, astfel încât $f_n(x) = \ln(1 + \sin^n x)$, F_n este o primitivă a funcției f_n şi $g_n(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} f_n(t)\, dt$.

(4p) **a)** Să se calculeze $g_n\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **b)** Să se demonstreze că $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$, $\forall\, x \in (-1, 1)$, $g_n(x) = F_n(\arcsin x) - F_n\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

(4p) **c)** Să se demonstreze că $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$, $\forall\, x \in (-1, 1)$, $g_n'(x) = \frac{\ln(1 + x^n)}{\sqrt{1 - x^2}}$.

(2p) **d)** Să se demonstreze că pentru $n \in \mathbf{N}^*$, funcția g_n este strict monotonă pe $(-1, 1)$ dacă şi numai dacă n este număr par.

(2p) **e)** Să se demonstreze că $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} g_n(x)\, dx = -\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x \cdot \ln(1 + x^n)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se demonstreze că $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} g_n(x)\, dx = 0$.

(2p) **g)** Să se demonstreze că $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\lim\limits_{x \to \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.